LA MOLTITUDINE DEI NUMERI PRIMI

Liceo Matematico - classe IV Archimede

PRIMA PARTE:

Partiamo con la definizione di numero primo:

DEF: "Un numero naturale, diverso da 0 e da 1, si dice ***primo*** se ammette come divisori soltanto se stesso e uno. Se un numero non è primo si dice ***composto***."

Scrivi qualche esempio di numero primo: …………………………………………………………………………………….

e qualche esempio di numero composto: ……………………………………………………………………………………

Per trovare i numeri primi Eratostene inventò un **algoritmo** (sequenza di istruzioni) molto semplice ma efficace, chiamato Crivello di Eratostene. Il metodo è il seguente:

- scrivi tutti i numeri naturali da 1 a 100;
- cancella lo 0 e l'1;
- cerchia il numero 2 e poi cancella tutti i suoi multipli;
- cerchia il numero 3 e poi cancella tutti i suoi multipli;
- prosegui prendendo il numero immediatamente successivo a 3 rimasto nel crivello e cancella tutti i suoi multipli;
- ripeti il punto precedente finché tutti i numeri non saranno cancellati o cerchiati.

I numeri cerchiati sono primi, tutti gli altri sono composti.

IN GRUPPO:

Esegui le istruzioni: cronometra quanto tempo ti serve per portare a termine il lavoro e al termine fotografa il tuo crivello.

Elenca qui sotto i numeri primi minori di 100:

____

Ma a cosa servono i numeri primi?

<u>Teorema fondamentale dell'aritmetica</u>:

Ogni numero naturale maggiore di 1 o è primo, oppure può scriversi in un unico modo (a meno dell'ordine dei fattori) come prodotto di numeri primi.

Il teorema significa che, quando un numero non è primo, si può sempre scomporre in fattori primi, ad es:

- $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$
- $18 =$…………………………………………………………………………………

Ricordi il procedimento per trovare la scomposizione in fattori di un numero?

ESEMPIO

Scomponiamo in fattori primi 360.

Cerchiamo la scomposizione dividendo 360 per i successivi fattori primi, organizzando il calcolo come nello schema qui a fianco.
Otteniamo così la scomposizione di 360 in fattori primi:

$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

ovvero:

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

IN GRUPPO:

Scomponi in fattori primi i seguenti numeri:

229 55, 50, 75 $[5 \cdot 11, 2 \cdot 5^2, 3 \cdot 5^2]$

234 Videolezione 1200, 1008 $[2^4 \cdot 3 \cdot 5^2, 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7]$

Ma questi sono “**problemi matematici difficili**”! Difficili? In che senso?

Trovare i numeri primi con il crivello di Eratostene e la fattorizzazione di un numero sono dei “problemi matematici difficili” nel senso che più il numero è grande più tempo ci vuole…

IN GRUPPO:

Prova a stimare quanto tempo ti servirebbe per trovare i numeri primi da 2 a 100 000 000. Quanti giorni ti servirebbero per portare a termine il lavoro? Discuti la stima prima con il tuo gruppo e poi con tutta la classe.

SECONDA PARTE:

Nell'ultima parte di questo laboratorio dimostreremo il teorema di Euclide sui numeri primi. Prima però dobbiamo capire alcune questioni di base.

In matematica, così come nella vita di tutti i giorni, si possono fare delle affermazioni di vario genere che possono essere vere o false, ad esempio:

Affermazione1: *Un numero naturale sommato al suo successivo dà sempre come risultato un numero pari.*

Affermazione2: La somma di due numeri dispari è un numero pari.

IN GRUPPO:

Discuti con i tuoi compagni se le affermazioni 1 e 2 sono vere o false.

Affermazione 1 è VERA/FALSA perchè ……………………………………………………………………………………….

……….

Affermazione 2 è VERA/FALSA perchè ……………………………………………………………………………………….

……….

……….

Discutine con il tuo gruppo e poi con tutta la classe.

Conclusioni: Che differenza c'è tra un'affermazione falsa, un teorema e una congettura? …………….

……….

……….

Utilizzando i numeri naturali, inventa:

un'affermazione falsa: ……………………………………………………………………………………………………….

è falsa perchè ……

un teorema: ……….

è vero perchè …….

TERZA PARTE:

Ma quanti sono i numeri primi? Osserva il vostro crivello di Eratostene: sembra che man mano che si procede nella successione dei numeri naturali, sia sempre più raro incontrare numeri primi.

Negli Elementi di Euclide, Libro IX, Proposizione 20 si legge:

"***Esistono sempre numeri primi in numero maggiore di quanti numeri primi di vogliano proporre***".

Come tradurresti il teorema in linguaggio moderno?

………

Euclide ha dimostrato questo teorema sfruttando un'idea semplice ma efficace: a partire da un numero finito di numeri primi, è possibile costruire un numero primo diverso da quelli di partenza.

IN GRUPPO:

Come fare? Partiamo con degli esempi:

- Considera i primi *tre* numeri primi: ……, ……, …… .
- Calcola il prodotto dei tre numeri primi e aggiungi 1. Che cosa ottieni? …… .
- È un numero primo diverso dai tre presi in considerazione? …… .
- Se dividi il numero ottenuto per 2 ottieni …… con resto ……
- Se dividi il numero ottenuto per 3 ottieni …… con resto ……
- Se dividi il numero ottenuto per 5 ottieni …… con resto ……

- Ripeti il procedimento considerando i primi *quattro* numeri primi. Calcola il loro prodotto e aggiungi 1. Che cosa ottieni? …… .
- È un numero primo diverso dai quattro presi in considerazione? …… . Per controllare velocemente puoi cercare online la tavola dei numeri primi.
- Cosa dovresti fare se non avessi a disposizione la tavola?

  …….
- Prova ora a dividere il numero ottenuto per 2: ottieni …. con resto … . E se lo dividi per 3? E per 4? ……….
- Perchè il resto è sempre 1? …………………………………………………………………………………………………

  ………

- Ripeti il procedimento considerando i primi *cinque* numeri primi. Che cosa ottieni? …… .

- È un numero primo diverso dai quattro presi in considerazione? …… . Per controllare velocemente puoi cercare online la tavola dei numeri primi.

- Considera ora i primi sei numeri primi: ……, ……, ……, ……, ……, …… . Calcola il prodotto dei sei numeri e aggiungi 1. Dovresti ottenere 30 031, che non è un numero primo. Infatti, se lo dividi per 509, ottieni …… . La scomposizione in fattori primi di 30 031 quindi è …………………………… . Confronta i fattori primi in cui è scomposto 30 031 con i sei numeri primi da cui sei partito. Che cosa noti? ……………………………………………………………………………..

Procedere a tentativi sembra convincente, ma non possiamo andare avanti all'infinito. Dobbiamo ragionare più in generale. Seguiamo quindi la dimostrazione di Euclide:

DIMOSTRAZIONE:

Consideriamo i primi *n* numeri primi e chiamiamoli $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$;

- calcoliamo $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \ldots \cdot p_n$+1;
- osserviamo che possono capitare due situazioni: o *N* è un nuovo numero primo diverso da ciascuno dei numeri $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, oppure nella scomposizione in fattori di *N* si ottiene un nuovo numero primo diverso da $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$.

Dimostriamo quanto abbiamo osservato:

N non è divisibile per alcuno dei numeri primi $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ considerati. Infatti, dividendo *N* per p_1 otteniamo come resto ……; dividendolo per p_2 otteniamo come resto …… e così via. Dividendo *N* per uno qualunque dei numeri primi considerati il resto è sempre …… .

Se *N* non è divisibile per $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, allora:

- o è un numero primo,
- o non è un numero primo e scomponendolo in fattori primi otteniamo …………………………… .

In entrambi i casi abbiamo ottenuto un ……………………………… diverso da …………………………………… .

Se, a partire da un qualunque numero di numeri primi, ne possiamo sempre costruire uno diverso, allora i numeri primi sono ………………………………. .

Come volevasi dimostrare (*cvd*).